1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: $\boxed{10 \text{ a } 12{:}45}$ $\boxed{16{:}15 \text{ a } 19}$

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio 2 - 1er Parcial (18/12/2012)

---

1. Sea $H = \left\{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : 2a_{11} + a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22} = 0\right\}$ y $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Determinar, si es posible, un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ tal que

$$\mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(f) = H \quad \text{y} \quad \mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = S.$$

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que

$$\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

¿Vale lo mismo si $\dim_K(V) = \infty$?
(considerar por ejemplo $V = K^{\mathbf{N}}$ y $f \in \mathrm{End}_K(K^{\mathbf{N}})$ dado por $f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$).

---

3. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix},$$

y para alguno de los valores hallados, calcular la base $\mathcal{B}$.

---

4. Sea $\varphi_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ definido por $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{i} x_j$, $1 \leq i \leq n$. (Así, $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2, \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.) Probar que $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ es base de $(\mathbb{R}^n)^*$ y calcular la base $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

---

5. En $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\,B^t)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS